高一(下)

数学错题

刘振宇

SB 傻逼出版社

快捷判断

幂函数	$f(xy)=f(x)f(y)$
	$f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}$
正比例函数：	$f(x+y)=f(x)+f(y)$
	$f(x-y)=f(x)-f(y)$
对数函数：	$f(x)+f(y)=f(xy)$
	$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$
指数函数	$f(x+y)=f(x)f(y)$
	$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$

第 4 题来源：重庆八中 2023-2024 学年度（上）高一年级期末考试(数学)，答题时间：2024-01-16 00:00:00

错题题目

已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的不恒为零的函数，且 $f(3)=\frac{1}{3}$ ，则下列说法正确的是 ACD

A. 若对任意 x ， $y\in R$ ，总有 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$ ，则 $f(x)$ 是奇函数 ✓

B. 若对任意 x ， $y\in R$ ，总有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ，则 $f(x)$ 是偶函数 ✗

C. 若对任意 x ， $y\in R$ ，总有 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$ ，则 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$ ✓

D. 若对任意 x ， $y\in R$ ，总有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ，则 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}$ ✓

A: $x=y=0$ 时， $f(0)=0$.

$x=y=1$ 时， $f(1)=2f(1)\Rightarrow f(1)=0$.

$x=y=-1$ 时， $f(1)=-1f(-1)-1f(-1)=-2f(-1)=0\Rightarrow f(-1)=0$.

$y=-1$ 时. $f(-x)=-f(x)+x\cdot f(-1)=-f(x)$. $\therefore f(x)$ 为奇函数

B: $x=y=0$ 时， $f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

$y=-x$

$f(0)=f(x)+f(-x)=0$.

$-f(x)=f(-x)$ $\therefore$ 奇函数.

C: $f(3)=\frac{1}{3}$ $f(0)=f(1)=f(-1)=0$.

令 $x=3,y=-\frac{1}{3}$

$f(-1)=-\frac{1}{3}f(3)+3f(-\frac{1}{3})=0$.

$3f(-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}f(3)=\frac{1}{9}$

$f(-\frac{1}{3})=\frac{1}{27}$

D: $f(1+1+1)=\frac{1}{3}=3f(1)$ 正比例函数

$f(1)=\frac{1}{9}=3f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}$

$f(-\frac{1}{3})=-\frac{1}{27}$

第 5 题来源：重庆八中 2023-2024 学年度（上）高一年级期末考试(数学)，答题时间：2024-01-16 00:00:00

错题题目

已知函数 $f(x)=|\cos 2x+\cos x|$ ，有下列四个结论正确的是 ACD

A. $f(x)$ 图像关于直线 $x=-2\pi$ 对称

B. $f(x)$ 的值域为 $[0,\frac{9}{8}]$

C. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{4},-\pi\right]$ 上单调递减

D. $f(x)$ 在 $[-3\pi,3\pi]$ 上恰有 10 个零点

偶函数：$f(-x)=f(x)$.

周期：$f(x)=f(x+T)$

若函数同时关于 x = a, x = b 对称，其最小正周期是：

$T=2|a-b|$

A: $f(-x)=f(x)$.

$|\cos(-2x)+\cos(-x)|=|\cos(2x)+\cos x|$ 周期为2π

B: $\cos 2x=2\cos^2x-1$

$f(x)=|2\cos^2x+\cos x-1|$

令 $t=\cos x$，$t\in[-1,1]$

$f(x)=|2t^2+t-1|$

$2t^2+t-1$

$=2(t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{16})-\frac{9}{8}$

$=2(t+\frac{1}{4})^2-\frac{9}{8}$

$2t^2+t-1\in[-\frac{9}{8},2]$

$\therefore f(x)\in[0,2]$

$[-\frac{5}{4}\pi,-\pi]$ 与 $[\pi,\frac{5}{4}\pi]$ 单调性相反

C: $\cos x$ 在 $[\pi,\frac{5}{4}\pi]$ 单增.

$t=\cos x\in[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$f(x)=2t^2+t-1$ 对称轴 $t=-\frac{1}{4}$

$-1<-\frac{\sqrt{3}}{2}<-\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)$ 在 $[\pi,\frac{5}{4}\pi]$ 单调递增

在 $[-\frac{5}{4}\pi,-\pi]$ 单调递减

D: $2t^2+t-1=0$.

$(t+1)(2t-1)=0$.

$t_1=-1$ $t_2=\frac{1}{2}$

$\cos x=-1$ $\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\pi,-3\pi$ $x=\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi,\frac{7}{3}\pi$.

$(2+3)\times 2=10$ 个.

分子$+2\pi$.

$\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{3}$

$\cos 2x=\cos^2x-1$

复合函数：用 $t=\cos x$、外层二次函数

第 6 题来源：重庆八中 2023-2024 学年度（上）高一年级期末考试(数学)，答题时间：2024-01-16 00:00:00

错题题目

已知函数 $f(x)=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-1$，当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 时，关于 x 的方程 $f(x)+a=0$ 有两个实数根，则实数 a 的取值范围为 $(-2,-\sqrt{3}]$

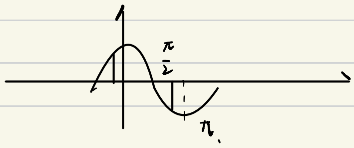
$f(x)=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x\right)$

$=2\times\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-a$ 有两解.

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$



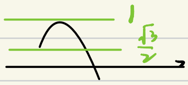
$f(x)=-a$

$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$

$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2}{3}\pi\right]$ $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]\uparrow$ $\left[0,\frac{2}{3}\pi\right]\downarrow$

$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6}\right]\uparrow$，在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\downarrow$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=1$ $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$



$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a}{2}.$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\le\frac{-a}{2}<1.$

$\therefore a\in(-2,-\sqrt{3}]$

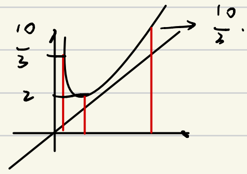
构成三角形：判断最小的两边之和大于第三边。

第 7 题来源：重庆八中 2023-2024 学年度（上）高一年级期末考试(数学)，答题时间：2024-01-16 00:00:00

错题题目

已知函数 $f(x)=\left|x+\frac{1}{x}-a\right|+1$，对任意实数 $x_1,x_2,x_3\in[\frac{1}{3},3]$，使得以 $f(x_1),f(x_2),f(x_3)$ 数值为边长可构成三角形，则实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{5}{3})\cup(\frac{7}{3},3)\cup(\frac{11}{3},+\infty)$.

$2f(x)_{min}>f(x)_{max}$.



$x+\frac{1}{x}\geq 2$. 当且仅当 $x=1$时取等.

$a\leq 2$时.

$f(x)=x+\frac{1}{x}-a+1$ $\quad f(x)_{min}=3-a$. $\quad f(x)_{max}=\frac{13}{3}-a$.

$6-2a>\frac{13}{3}-a\Rightarrow a<\frac{5}{3}$

$a\in(2,\frac{10}{3}]$时. $\quad x+\frac{1}{x}=a$时, $f(x)_{min}=1$

$f(x)_{max}=\max\{\frac{13}{3}-a,a-1\}$

$(x+\frac{1}{x}-a+1)_{max}=\frac{13}{3}-a$.

$(a-x-\frac{1}{x}+1)_{max}$

$=a-2+1=a-1$.

$\begin{cases}2>\frac{13}{3}-a\\2>a-1\end{cases}\Rightarrow a\in(\frac{7}{3},3)$.

$a\geq\frac{10}{3}$时 $\quad f(x)=a-x-\frac{1}{x}+1$. $\quad f(x)_{min}=a-\frac{7}{3}$ $\quad f(x)_{max}=a-1$

$2(a-\frac{7}{3})>a-1\Rightarrow a>\frac{11}{3}$.

第 10 题来源：重庆八中 2023-2024 学年度（上）高一年级期末考试(数学)，答题时间：2024-01-16 00:00:00

错题题目

已知函数 $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$，$x\in R$ 的图像关于点 $(0,1)$ 中心对称.

（1）求实数 a 的值； $a=2$.

（2）探究 $f(x)$ 的单调性，并证明你的结论； √ 单增

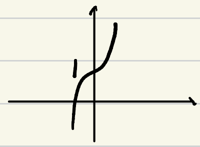
（3）解关于 x 的不等式 $f(4^x)+f(2-3\times2^x)>2$.

关于 (a, b) 中心对称

$x_1+x_2=2a$

$f(x_1)+f(x_2)=2b$

$f(x)=2-\frac{2}{2^x+1}$ 关于 $(0,1)$ 中心对称，单调递增.



$f(x)+f(-x)=2$.

$f(4^x)>2-f(2-3\times2^x)=f(-2+3\times2^x)$

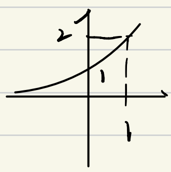
$4^x>-2+3\times2^x$.

令 $t=2^x$.

$t^2>-2+3t$.

$t\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

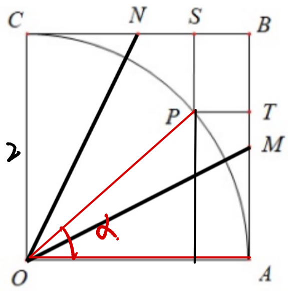
$x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$



第 11 题来源：重庆八中 2023-2024 学年度（上）高一年级期末考试(数学)，答题时间：2024-01-16 00:00:00

错题题目

如图，正方形$OABC$的边长为 2，M,N分别为AB,BC的中点．以O为圆心，OA为半径的圆弧$\overset{\frown}{AC}$上有一点P，T,S两点分别在线段AB,BC上，使得四边形$SBTP$为矩形．



（1）将点M绕O点逆时针旋转θ后使其与N点重合，求$\cos\theta$；✓

（2）求矩形$SBTP$面积的最大值．

用角表示面积

转化为二次函数求最值

$\angle AOP=\alpha$　$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

$|PS|=2-2\sin\alpha$　$|PT|=2-2\cos\alpha$

$S=|PS||PT|=4-4(\sin\alpha+\cos\alpha)+4\sin\alpha\cos\alpha$

$t=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$　$\boxed{\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}}$

$\therefore S=2t^2-4t+2$.　$t\in(1,\sqrt{2})$

$t=\sqrt{2}$时，$\alpha=\frac{\pi}{4}$

$S_{max}=6-4\sqrt{3}$

第 9 题来源：重庆八中 2023-2024 学年度（上）高一年级期末考试(数学)，答题时间：2024-01-16 00:00:00

错题题目

北京时间 2023 年 12 月 15 日 21 时 41 分，我国在海南文昌航天发射中心用长征五号运载火箭成功将遥感四十一号卫星顺利送入预定轨道，发射任务获得圆满成功．据了解，在不考虑空气动力和地球引力的理想状态下，可以用公式$v=v_1+v_0\cdot\ln\frac{M}{M-m}$计算火箭的最大速度$v$（单位：米/秒），其中$v_0$（单位：米/秒）是喷流相对速度（即喷流相对火箭箭体喷出的速度，由火箭发动机性能决定，运动过程中视为常数），v_1是指火箭的初始速度（单级火箭初始速度视为 0，二级火箭v_1视为上一飞行阶段火箭的最大速度），在每个飞行阶段中，m（单位：吨）是火箭消耗的推进剂的质量，M（单位：吨）是指火箭在该阶段的总质量（含推进剂），$\frac{M}{M-m}$称为总质比，已知 A 型火箭是一枚单级火箭，B 型火箭是一枚二级火箭，它们的喷流相对速度均为1000米/秒．

（1）B 型火箭飞行时会经历两个飞行阶段，先点燃一级助推器，一级助推器燃料耗尽后将其抛掉，再点燃二级火箭进入第二阶段，B 型火箭的总质量共 12 吨，其中一级助推器总重量 7 吨，装载了 6 吨推进剂，二级火箭总重为 5 吨，装载了 4 吨推进剂，求理想状态下 B 型火箭的最大速度；

（2）A 型火箭只有一个飞行阶段，经过技术改进后其喷流相对速度提高到了原来的$\frac{3}{2}$倍，总质比变为原来的$\frac{1}{3}$，若要使 A 型火箭在理想状态下的最大速度至少增加500米/秒，求在技术改进前总质比的最小整数值（参考数据：$\ln 10\approx 2.3$，$2.718<e<2.719$）．

(1) $V_1=1000\cdot\ln\frac{12}{12-6}=1000\cdot\ln 2$

$V_2=1000\cdot\ln 2+1000\ln\frac{5}{5-4}=1000\cdot\ln 10\approx 2300m$

(2) $1500\cdot\ln\frac{t}{3}-1000\ln t\geq 500$　　$\ln(\frac{t}{3})^3-\ln t^2\geq 1$

$3\ln\frac{t}{3}-2\ln t\geq 1$　　$\ln\frac{t}{27}\geq 1\Rightarrow\frac{t}{27}\geq e$　$t\geq 27e$ 参考数据

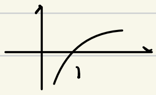
第 12 题来源：重庆八中 2023-2024 学年度（上）高一年级期末考试(数学)，答题时间：2024-01-16 00:00:00

错题题目

已知函数 $f(x)=x^2+ax+\frac{1}{4}$ ，$g(x)=\ln x$.

（1）若函数 $y=g(f(x))$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；✓ $[-\frac{5}{4},+\infty)$

（2）用 $\max\{m$ ，$n\}$ 表示 m ，n 中的最大值，设函数 $h(x)=\max\{f(x)$ ，$g(x)\}$ ，$x\in(0,+\infty)$ ，试讨论 $h(x)$ 的图象与 x 轴的交点个数.

(2) 

$x>1$ 时，$h(x)>0$ 无零点

$x=1$ 时 $g(x)=0$　$f(x)=\frac{5}{4}+a$.

若 $a\geq-\frac{5}{4}$，$x=1$ 不为 $h(x)$ 的零点.

若 $a<-\frac{5}{4}$，$x=1$ 为 $h(x)$ 的零点.

分参

$x\in(0,1)$ 时　$g(x)<0$.

$f(x)=0=x^2+ax+\frac{1}{4}\Rightarrow -a=x+\frac{1}{4x}$

$m(x)=x+\frac{1}{4x}$ 在 $(0,\frac{1}{2}]$ ↓，在 $(\frac{1}{2},1)$ ↑

$m(1)=\frac{5}{4}$　$m(\frac{1}{2})=1$.

$m(x)\in[1,\frac{5}{4})$

$\therefore -a\geq\frac{5}{4}$ 即 $a\leq-\frac{5}{4}$ 时，有一个解.

$1<-a<\frac{5}{4}$ 时. $a\in(-\frac{5}{4},-1)$ 有两解

$-a<1$ 即 $a>-1$ 时 无解

函数 y = Asin(\omega x + \fai) 的图像与性质

4. 设函数 $f(x)=x+2\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)$，则 $f\left(\frac{1}{2\,019}\right)+f\left(\frac{2}{2\,019}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,018}{2\,019}\right)$ 的值为（ D ）

A. 2 019　　B. 2 018

C. $\frac{2\,019}{2}$　　D. 1 009

观察发现 第一项 最后一项 和为1.

则试求解 $f(x)+f(1-x)$

等差数列

$f(x)+f(1-x)=x+2\sin(x-\frac{1}{2})+1-x+2\sin(\frac{1}{2}-x)=1$

原式 $=\frac{1}{2}\times2018\times1=1009$

非标准形三角函数

7. 对于函数 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$，给出下列四个结论：①函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π；②若 $f(x_1)=-f(x_2)$，则 $x_1=-x_2$；③$f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称；④$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递减. 其中正确结论的个数为(D)

A. 2　　B. 4　　C. 1　　D. 3

$f(x)=(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

① $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

③ 对称轴：$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

④ $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ 时

$2x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$ ✓

操作方法

❶ 判周期性

周期为 $T\Leftrightarrow f(x+T)=f(x)$.

❷ 判对称性

轴对称：图象的对称轴为直线 $x=a\Leftrightarrow f(x+a)=f(a-x)$.

中心对称：图象的对称中心为点 $(a,b)\Leftrightarrow f(x+a)+f(a-x)=2b$.

❸ 判单调性

在区间内把函数整理为容易判断单调性的形式.

❹ 判最值

在一个周期内分区间讨论.

三角形的应用

见第六页 11 题，转化为二次函数求最值。

表示为三角函数
再化简

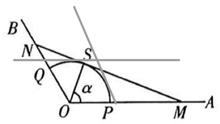
范围为平行线
不构成角时

用t代替分母
转换基本不等式

10. 如图所示，扇形 OPQ 区域（含边界）是一蔬菜种植园，其中 P,Q 两点分别在公路 OA 和 OB 上. 经测量，扇形 OPQ 区域的圆心角 $\angle POQ=\frac{2\pi}{3}$，半径为 1 km. 为了方便菜农营销，该蔬果种植园打算在扇形 OPQ 区域外修建一条公路 MN，分别与 OA 和 OB 交于点 M 和点 N，并要求 MN 与 $\overset{\frown}{PQ}$ 相切于点 S. 设 $\angle POS=\alpha$（弧度），假设公路的宽度均忽略不计.

(1) 将公路 MN 的长度（单位：km）表示为 α 的函数，并写出 α 的取值范围；

(2) 求公路 MN 长度的最小值，并求出此时 α 的值.



(1) $SM=\tan\alpha$

$NS=\tan(\frac{2}{3}\pi-\alpha)$

$MN=\tan\alpha+\tan(\frac{2}{3}\pi-\alpha)$

$=\tan\alpha+\dfrac{\tan\frac{2}{3}\pi-\tan\alpha}{1+\tan\frac{2}{3}\pi\tan\alpha}$

$=\tan\alpha+\dfrac{\sqrt{3}+\tan\alpha}{\sqrt{3}\tan\alpha-1}$

$=\dfrac{\sqrt{3}(\tan^2\alpha+1)}{\sqrt{3}\tan\alpha-1}$　　$\alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$

(2) $\sqrt{3}\tan\alpha-1>0$

令 $\sqrt{3}\tan\alpha-1=t$.

$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}(t+1)$

$MN=\frac{\sqrt{3}}{3}(t+\frac{4}{t}+2)\geq\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}+2)=2\sqrt{3}$

观察相似结构
单调性的定义式化标
$g(x)=xf(x)$

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数 若 $\forall a$，$b\in[0，+\infty)$，且 $a\neq b$，都有 $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}<0$ 成立，则不等式 $f(\frac{1}{t})-(2t^2-t)f(2t-1)>0$ 的解集为 D

A. $(-1,0)\bigcup(\frac{1}{2},+\infty)$ B. $(-\frac{1}{2},0)\bigcup(1,+\infty)$ C. $(-\infty,-1)\bigcup(\frac{1}{2},+\infty)$ D. $(-\infty,-\frac{1}{2})\bigcup(1,+\infty)$

令 $g(x)=xf(x)$，奇函数.

$\therefore \dfrac{g(a)-g(b)}{a-b}<0$

$g(x)$ 在 R上为减函数

当 $t>0$ 时，$\frac{1}{t}f(\frac{1}{t})>(2t-1)f(2t-1)$

即 $g(\frac{1}{t})>g(2t-1)$

$\frac{1}{t}<2t-1$

$\therefore t>1$

当 $t<0$ 时.

$g(\frac{1}{t})<g(2t-1)$

解得 $t<-\frac{1}{2}$ 或 $t>1$

$t\in(-\infty,\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$

11. 已知定义在区间 $D=(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)-f(y)=\dfrac{2f(xy)}{f(y-x)}$，当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，且 $f(1)=2$，则

A. $f(2)=1$ ✓ $f(2)=1$ $f(-2)=-2$.

B. $f(x)$ 为偶函数 ✗

C. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

D. 任意 $x_1\in D$，存在 $x_2\in D$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=x_1+x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2f(x_1x_2)}{f(x_2-x_1)}$

14. 函数 $f(x)$ 满足 $lnx=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，且 x_1，x_2 均大于 e，$f(x_1)+f(x_2)=1$，则 $f(x_1x_2)$ 的最小值为 $\frac{5}{7}$.

解出 f(x)

$f(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln x+1}=1-\dfrac{2}{\ln x+1}$

$f(x_1x_2)=1-\dfrac{2}{\ln(x_1\cdot x_2)-1}\geqslant\frac{5}{7}$

$\because f(x_1)+f(x_2)$

$=2-\dfrac{2}{\ln x_1+1}-\dfrac{2}{\ln x_2+1}=1$

$\dfrac{2}{\ln x_1+1}+\dfrac{2}{\ln x_2+1}=1$

基本不等式
替换

$\ln x_1\ln x_2=\ln(x_1+x_2)+3.\leqslant\left(\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{2}\right)^2=\dfrac{\ln^2(x_1+x_2)}{4}$

$\ln^2(x_1+x_2)-4\ln(x_1\cdot x_2)-12\geqslant0.$

$\therefore \ln(x_1\cdot x_2)\geqslant6.$ (舍负)

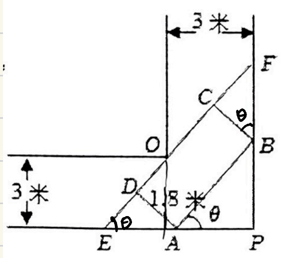


图2

18．（17 分）随着私家车的逐渐增多，居民小区“停车难“问题日益突出．本市某居民小区为缓解“停车难”问题，拟建造地下停车库，建筑设计师提供了该地下停车库的入口和进入后的直角转弯处的平面设计示意图．

（2）在车库内有一条直角拐弯车道，车道的平面图如图 2 所示，车道宽为 3 米，现有一辆转动灵活的小汽车，其水平截面图为矩形 $ABCD$，它的宽 AD 为 1.8 米，直线 CD 与直角车道的外壁相交于 E、F．

i．若小汽车卡在直角车道内（即点 A、B 分别在 PE、PF 上，点 O 在 CD 上）$\angle PAB=\theta(rad)$，求水平截面的长（即 AB 的长，用 θ 表示`

ii．若小汽车水平截面的长为 4.4 米，问此车是否能顺利通过此直角拐弯车道？

i. $EF = OE + OF = \frac{3}{\cos\theta} + \frac{3}{\sin\theta}$

$DE = \frac{1.8}{\tan\theta}$ $\quad CF = 1.8\tan\theta$

$CD = EF - DE - CF = \frac{3}{\cos\theta} + \frac{3}{\sin\theta} - \frac{1.8}{\tan\theta} - 1.8\tan\theta$

$= \frac{3(\sin\theta+\cos\theta)-1.8}{\sin\theta\cos\theta}$

当同时遇到 sin \theta + cos\theta
和 sin \theta·cos \theta
时，用 t 代换

ii 令 $t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

$\sin\theta\cos\theta = \frac{t^2-1}{2}$

$CD = \frac{6t-3.6}{t^2-1}$

$t=\sqrt{2}$时，取得最小值 $6\sqrt{2}-3.6>4.4$

可通过.

19．（17 分）已知函数 $f(x)=\sin x-\cos x$．

（1）求方程 $f(\alpha)=\cos 2\alpha$ 在 $[0，2\pi]$ 上的解集；

（2）设函数 $F(x)=f(x)+\frac{3}{2}ln x$；

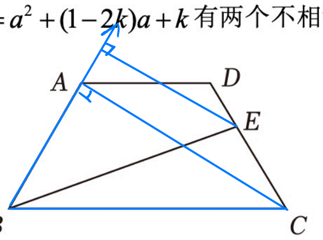
i．证明：$y=F(x)$ 有且只有一个零点；

ii．记函数 $y=F(x)$ 的零点为 x_0，证明：$-\frac{2}{3}<ln x_0+\frac{1}{3}\sin 2x_0<\frac{1}{3}$．

求最值:
$\overrightarrow{BE}$ 向 $\overrightarrow{BA}$ 向量投影 E在C点时投影向量最小.

顶点小于0.
$g(0)>0$.
$g(2)>0$.

8.(5 分)如图,在等腰梯形 $ABCD$ 中,下底 BC 长为 2,底角 C 为 $60°$,腰 AB 长为 $a(0<a<2)$,E 为线段 CD 上的动点,设 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为 f(a),若关于 a 的方程 f(a)$=a^2+(1-2k)a+k$ 有两个不相等的实根,则实数 k 的取值范围为(C)



A. $(0,\frac{4}{3})$

B. $(0,1)$

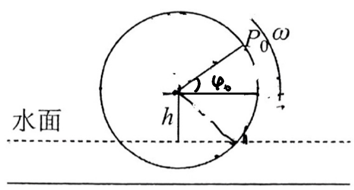
C. $(1,\frac{4}{3})$

D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

数学周考(二)

B

4. 明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理(如图).假定水流量稳定的情况下,筒车上的每一个盛水筒都做逆时针匀速圆周运动,筒车转轮的心 O 到水面的距离 h 为 1.5m,筒车的半径 r 为 2.5m,筒车转动的角速度 ω 为 $\frac{\pi}{12}\text{rad/s}$ 如图所示,盛水桶 M(视为质点)的初始位置 P_0 距水面的距离为 3m,则 $3s$ 后盛水桶到水面的距离近似为$(\sqrt{2}\approx1.4.\sqrt{3}\approx1.7\ .)$



A. 4.5m　　B. 4.0m　　C. 3.5m　　D. 3.0m

$\sin\varphi_0=\frac{3-1.5}{2.5}=\frac{3}{5}$

距离 $d=2.5\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi_0\right)+1.5$

代入 $t=3$

$d=2.5\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+1.5\approx3.974\approx4.0.$

递推

A 8．已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$，则 $f(\frac{5}{2})$ 的值是

A．0　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．$\frac{5}{2}$

$\frac{3}{2}f(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}f(\frac{3}{2})$

$\frac{1}{2}f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}f(\frac{1}{2})$

$-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(-\frac{1}{2})$

∵偶函数，$f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = 0$.

∴ $f(\frac{5}{2}) = f(\frac{3}{2}) = f(\frac{1}{2}) = 0$.

∵ $xf(x+1) = (1+x)f(x)$

$\frac{f(x+1)}{x+1} = \frac{f(x)}{x}$

$\boxed{同构}$　$g(x) = \frac{f(x)}{x}$　奇函数.

$g(x+1) = g(x)$

$T_g = 1$

$f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$

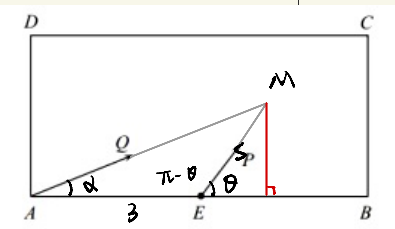
$g(-\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = 0$.

数学周考（一）T7

13.集合 $\{p\}=\{x|px^2+qx+1\le 0\}$，则 $p+q=$ ____-1____.

$px^2+qx+1\le 0$ 有且只有一个解为 p.

$\begin{cases} \Delta = q^2-4p=0. \\ (代入p)\ p^3-pq+1=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=-2 \\ p=1 \end{cases}$



18.（17分）某校兴趣小组在如图所示的矩形区域 $ABCD$ 内举行机器人拦截挑战赛，在 E 处按 $\overrightarrow{EP}$ 方向释放机器人甲，同时在A处按 $\overrightarrow{AQ}$ 方向释放机器人乙，设机器人乙在 M 处成功拦截机器人甲，两机器人停止运动．若点 M 在矩形区域 $ABCD$ 内（包含边界），则挑战成功，否则挑战失败．已知 $AB=6$ 米，E 为 AB 中点，比赛中两机器人均匀速直线运动方式行进，记 $\overrightarrow{EP}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 的夹角为 θ（$0<\theta<\pi$），$\overrightarrow{AQ}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 α（$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$）.

已知机器人乙的速度是机器人甲的速度的2倍.　$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

（ii）如何设计矩形区域 $ABCD$ 的宽 AD 的长度，才能确保无论 θ 的值为多少，总可以通过设置机器人乙的释放角度 α 使机器人乙挑战成功?

△AEM中，两边之和＞第三边 $2s+s>3 \Rightarrow x>1$

两边之差＜第三边 $2s-s<3 \Rightarrow x<3$.

设 $EM=s$. $AM=2s$

$\cos(\pi-\theta) = \frac{3^2+s^2-(2s)^2}{2\times3\times s} = \frac{3}{2s} - \frac{s}{2} = -\cos\theta$.

$AD \geq s\cdot\sin\theta = \sqrt{s^2(1-\cos^2\theta)} = \sqrt{-\frac{1}{4}(s^2-5)^2+4}$

$s\cdot\sin\theta_{max} = 2$.

19.（17 分）定义非零向量 $\overrightarrow{OA}=(m,n)$．若函数解析式满足 $f(x)=m\sin x+n\cos x$，则称 $f(x)$ 为向量 $\overrightarrow{OA}$ 的"$m-n$ 伴生函数"，向量 $\overrightarrow{OA}$ 为函数 $f(x)$ 的"源向量"．

（1）已知向量 $\overrightarrow{OA}=(2,0)$ 为函数 $g(x)$ 的"源向量"，若方程 $g(x)=k+1-2\sqrt{3}|\cos x|$ 在 $[0,2\pi]$ 上有且仅有四个不相等的实数根，求实数 k 的取值范围；

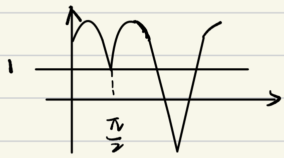
$g(x)=2\sin x=k+1-2\sqrt{3}|\cos x| \Rightarrow k=2\sin x+2\sqrt{3}|\cos x|-1 \quad x\in[0,2\pi]$.

① 当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ 时

$I(x)=2\sin x+2\sqrt{3}\cos x-1=4\sin(x+\frac{\pi}{3})-1$

② 当 $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 时,

$I(x)=2\sin x-2\sqrt{3}\cos x-1=4\sin(x-\frac{\pi}{3})-1$



结合图象：$k\in(1,2\sqrt{3}-1)\cup(2\sqrt{3}-1,3)$

（2）已知点 $A(m,n)$ 满足 $3n^2+m^2-4mn+1=0$，向量 $\overrightarrow{OA}$ 的"$m-n$ 伴生函数" $h(x)$ 在 $x=a$ 时取得最大值，当点 A 运动时，求 $\tan 2a$ 的取值范围；

由辅助角公式：$h(x)=m\sin x+n\cos x=\sqrt{m^2+n^2}\sin(x+\varphi)$，$\tan\varphi=\frac{n}{m}$.

$a+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow a=\frac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi$

$\tan a=\tan(\frac{\pi}{2}+2k\pi+\varphi)$

$\tan 2a=$ 二倍角 $=\frac{2}{\frac{n}{m}-\frac{m}{n}}$.

$\because 3n^2+m^2-4mn+1=0 \Rightarrow m^2(\frac{3n^2}{m^2}+1-\frac{4n}{m})+1=0$.

令 $t=\frac{n}{m}$

$m^2(3t^2-4t+1)+1=0$.

复合函数．使 t 有解．

外层 $\Delta>0 \Rightarrow \frac{1}{3}<t<1$.

$\tan 2a=\frac{2}{t-\frac{1}{t}} \to$ 对勾．

$\tan 2a=(-\infty,-\frac{3}{4})$

数学周考(三)

第4题 （单选题）你的得分0.0/满分5.0，班级正确率37.04%，年级正确率40.43%

【考查方向】棱柱的结构特征；棱锥的结构特征；棱台的结构特征

下列说法中，正确的是（ C ）

A. 有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形的几何体一定是棱柱；且每相邻两个四边形的公共边互相平行

B. 有两个面互相平行，其余四个面都是等腰梯形的六面体是棱台；腰延长交于一点

C. 底面是等边三角形，侧面都是等腰三角形的三棱锥不一定是正三棱锥；顶点在底面射影为重心.

D. 棱锥的侧棱长与底面多边形的边长相等（大于），则此棱锥可能是正六棱锥.

第10题 （多选题）你的得分2.0/满分6.0，班级正确率49.38%，年级正确率59.00%

【考查方向】判断余弦型函数的单调性或求解单调区间；利用余弦函数的单调性比较大小；求余弦（型）函数的对称轴、对称中心；余弦（型）、正切（型）函数的零点

已知函数 $f(x)=\cos|x|+|\cos x|$ ，下列结论正确的是（ ABD

A. $f(x)$ 在区间 $\left[2\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$ 单调递减 ✓ 　　画图可得

B. 函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=k\pi(k\in Z)$ ✓

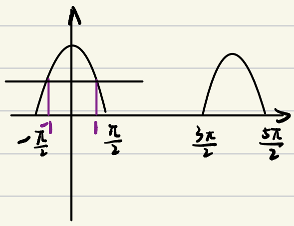
C. 函数 $y=f(x)\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 有5个零点 ✗.

D. $\forall x\in R, 2\cos 1\leqslant f(\sin x)\leqslant 2$

$$f(x)=\begin{cases}2\cos x, & \cos x>0\\ 0, & \cos x<0\end{cases}$$

C: $x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 时, $y=f(x)\sin x=0$.

∴ 有无数多零点.



D: $-1\le \sin x\le 1$

$1<\frac{\pi}{2}$

$f(1)=2\cos 1$

$2\cos 1\le f(\sin x)\le 2$.

第14题 你的得分0.0/满分5.0，班级正确率0.00%，年级正确率1.76%

【考查方向】正、余弦定理的综合应用

在锐角三角形 ABC 中，内角 A， B， C 所对的边 a， b， c 满足 $a^2-b^2=bc$ ，若 $\cos(C-B)+\lambda\cos A$ 存在最大值，则实数 λ 的取值范围是 (0,2) .

余弦定理变形

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\cos A=\frac{-bc+c^2}{2bc}$$

$2bc\cos A=-bc+c^2$

$2b\cos A=-b+c$

正弦定理边化角

$2\sin B\cos A=-\sin B+\sin C$

$\sin B=\sin C-2\sin B\cos A$

$=\sin(A+B)-2\sin B\cos A$

$=\sin(A-B)$

求出A,B角的关系

∵ 锐角 Δ

∴ $2B=A$

$$\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2} & (A=2B)\\ 0<B<\frac{\pi}{2}\\ 0<C<\frac{\pi}{2} & C=\pi-3B\end{cases}$$

确定B的范围

$\Rightarrow \frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$

原式 $=\cos(\pi-4B)+\lambda\cos 2B$

$=-\cos 4B+\lambda\cos 2B$ 　　二次函数.

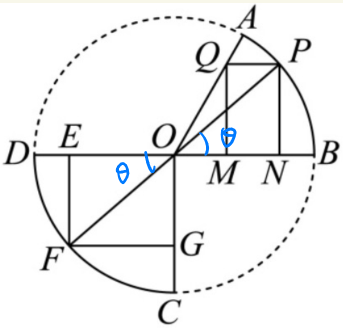
令 $\cos 2B=t$

原式 $=-2t^2+\lambda t+1$ 在 $t\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ 有最大值

∴ $\lambda\in(0,2)$

第18题 你的得分12.0/满分17.0，班级正确率12.53%，年级正确率27.24%

【考查方向】三角函数在实际生活中的应用



如图，学校新校区有两块空闲的扇形绿化草地 AOB（圆心角为 $\frac{\pi}{3}$）和 COD（圆心角为 $\frac{\pi}{2}$），BD 为圆的直径．在劣弧 AB 和劣弧 CD 上分别取点 P 和点 F，且 PF 为圆的直径，分别设计出两块社团活动区域，其中一块为矩形区域 $OEFG$，另一块为矩形区域 $MNPQ$，已知圆的直径 $PF=50$ 米，点 Q 在 OA 上、点 G 在 OC 上、点 M 和 N 在 OB 上、点 E 在 OD 上．

(1) 经设计，当 $\frac{5PF-8EO}{3PN}$ 达到最小值时，取得最佳观赏效果．请给出最佳观赏效果的设计方案？

设 $\angle EOF=\angle BOP=\theta$.

$OE=25\cos\theta \quad PN=25\sin\theta$

$\frac{5PF-8EO}{3PN}=\frac{10-8\cos\theta}{3\sin\theta}$

令 $m=\frac{10-8\cos\theta}{3\sin\theta} \Rightarrow 3m\sin\theta+8\cos\theta=10$

辅助角公式

$\sqrt{9m^2+64}\sin(\theta+\varphi)=10$. 其中 $\tan\varphi=\frac{8}{3m}$

$\theta+\varphi\in(\varphi,\frac{\pi}{3}+\varphi)$

$\sin(\theta+\varphi)\leq 1$

$\frac{10}{\sqrt{9m^2+64}}\leq 1 \Rightarrow m^2\geq 4$

$\because m=\frac{10-8\cos\theta}{3\sin\theta}>0 \Rightarrow m\geq 2$

$\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$

$\tan\varphi=\frac{4}{3}$

第19题 你的得分1.0/满分17.0，班级正确率14.16%，年级正确率27.79%

【考查方向】函数的新定义问题；求正弦型函数的值域或最值；辅助角公式(三角函数的叠加及应用（北师）)；向量模的坐标表示；向量线性运算的坐标表示

设 A 是有序实数对构成的非空集，B 是实数集，如果对于集合 A 中的任意一个有序实数对 (x,y)，按照某种确定的关系 f，在 B 中都有唯一确定的数 z 和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个二元函数，记作 $z=f(x,y),(x,y)\in A$，其中 A 称为二元函数 f 的定义域.

(1) 已知 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，若 $f(\vec{a})=1,f(\vec{b})=2,x_1x_2+y_1y_2=1$，求 $f(\vec{a}+\vec{b})$;

$f(\vec{a})=|\vec{a}|=1 \quad f(\vec{b})=|\vec{b}|=2. \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$f(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{7}$

(2) 非零向量 $\vec{u}=(x_0,y_0)$，若对任意的 $(x,y)\in D,D\subseteq A,h>0$，记 $\vec{a}=(x,y)$，都有 $f(\vec{a})<f(\vec{a}+h\vec{u})$，则称 f 在 D 上沿 $\vec{u}$ 方向单调递增.

已知 $f(x,y)=e^{x+y}+e^{x-y},x\in R,y\in R$. 请问 f 在 $\{(x,y)\mid x,y\in R\}$ 上沿向量 $(1,1)$ 方向单调递增吗？为什么？

$\vec{\mu}=(1,1) \quad \vec{a}=(x,y)$

$\vec{a}+h\vec{\mu}=(x+h,y+h)$

$f(\vec{a})=f(\vec{a}+h\vec{\mu})$

$e^{x+y}+e^{x-y}<e^{x+y+2h}+e^{x-y}$

$e^{x+y}<e^{x+y+2h}$

$\because h>0.$

e^x 在 R 上单调递增，$\therefore$ 成立.

(3) 设二元函数 f 的定义域为 D，如果存在实数 M 满足：
① $\forall(x,y)\in D$，都有 $f(x,y)\geqslant M$，
② $\exists(x_0,y_0)\in D$，使得 $f(x_0,y_0)=M$.
那么，我们称 M 是二元函数 f 的最小值.
求 $f(x,y)=y+\sin 2x+\left(\frac{1}{y}-y\right)cos^2x,(x,y)\in\left\{(x,y)|x\in R,\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 2\right\}$ 的最大值.

$y\in[\frac{1}{2},2]$

$f(x,y)=y+2\sin x\cos x+\frac{1}{y}\cos^2x-y\cos^2x$

提 $\frac{1}{y}$

$=\frac{1}{y}(y^2+2y\sin x\cos x+\cos^2x-y^2\cos^2x)$

$=\frac{1}{y}[y^2(1-\cos^2x)+2y\sin x\cos x+\cos^2x]$

$=\frac{1}{y}[y^2\sin^2x+2y\sin x\cos x+\cos^2x]$

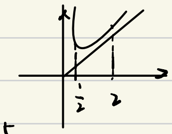
$=\frac{1}{y}(y\sin x+\cos x)^2$

辅助角公式

$=\frac{y^2+1}{y}\sin^2(x+\varphi)$，$\tan\varphi=\frac{1}{y}$.

$\sin(x+\varphi)=1$

$f(x,y)=y+\frac{1}{y}$



$\geqslant 2$.

$y=2$时，$f(x,y)=\frac{5}{2}$

高一(下)半期

14. 在 ΔABC 中，$16b=21c$，$A=60°$，其内切圆半径为 $\sqrt{3}$，则其外接圆半径为____

14. $\because 16b=21c$

设 $b=21t$，$c=16t$

2边+1角
余弦定理求第三边.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=361t^2$.

$\therefore a=19t$

$S_\Delta=\frac{1}{2}$周长 × 内接圆半径.

三角形面积求t.

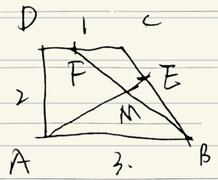
$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

$\frac{1}{2}\times21t\times16t\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times(19t+21t+16t)\times\sqrt{3}$. $\Rightarrow t=\frac{1}{3}$.

由正弦定理 $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{19}{9}\sqrt{3}$

16. (15 分)
在直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB//DC$，$AD\perp AB$，$CD=1$，$AD=2$，$AB=3$，动点 E,F 分别在线段 BC 和 DC 上，线段 AE 和 BF 相交于点 M，且 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=(1-\lambda)\overrightarrow{DC}$，$\lambda\in R$.
(1) 当 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=-3$ 时，求 λ 的值；
(2) 当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，求 $\frac{FM}{MB}$ 的值；

16.



(1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB})$

$=(1-\frac{2}{3}\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=-\frac{2+\lambda}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$\therefore -3=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=-(1-\frac{2}{3}\lambda)(\frac{2+\lambda}{3})\overrightarrow{AB}^2+\lambda\overrightarrow{AD}^2$

$=(\lambda+2)(2\lambda-3)+4\lambda\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$.

(2). $\overrightarrow{BM}=t\cdot\overrightarrow{BF}=t\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF})=t\cdot[\frac{3}{2}\overrightarrow{BE}+\frac{2}{9}\overrightarrow{BA}]$

$\frac{3}{2}t+\frac{2}{9}t=1\Rightarrow t=\frac{18}{31}$

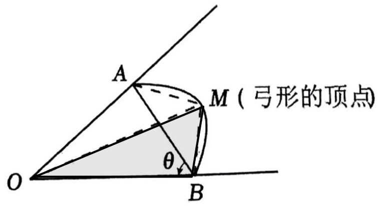
爪子定理

$\therefore\frac{FM}{MB}=\frac{31-18}{18}=\frac{13}{18}$.

17. （15 分）

重庆是我国著名的“火炉”城市之一，如图，重庆某避暑山庄 O 为吸引游客，准备在门前两条小路 OA 和 OB 之间修建一处弓形花园，使之有着类似“冰淇淋”般的凉爽感，已知 $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，弓形花园的弦长 $AB=2\sqrt{2}$，记弓形花园的顶点为 M，$\angle MAB=\angle MBA=\frac{\pi}{4}$，设 $\angle OBA=\theta\left(\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

“冰淇淋”设计图



（2）该山庄准备在 M 点处修建喷泉，为获取更好的观景视野，如何设计 OA,OB 的长度，才使得喷泉 M 与山庄 O 的距离的值最大？

17. $|\vec{OB}|=4\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)$ $|\vec{OA}|=4\sin\theta$.

(2) $|\vec{AB}|=2\sqrt{2}\Rightarrow AM=BM=2$.

$OM^2=OB^2+BM^2-2OB\cdot BM\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$ (余弦定理)

$=16\sin^2(\frac{\pi}{4}+\theta)+4-16\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$

$=16\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}+2\theta)}{2}+4-8\sin(\frac{\pi}{2}+2\theta)$

$=8+8\sin2\theta+4-8\cos2\theta=12+8\sqrt{2}\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})$ $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

$2\theta-\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 当 $\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})=1$ 时

$\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})\in(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$ $|OM|_{max}=2+\sqrt{2}$

$OA=OB=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

18. （17 分）

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)-1(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图像两相邻对称轴之间的距离是 $\frac{\pi}{2}$，若将 $f(x)$ 的图像上每个点先向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，所得函数 $g(x)$ 为偶函数.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）若对任意 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，$\left[f(x)\right]^2-(2+m)f(x)+2+m\leqslant0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

（3）若函数 $h(x)=2f(x)+1$ 的图像在区间 $[a,b]$（$a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$）至少有 10 个零点，在所有满足条件的区间 $[a,b]$ 中，求 $b-a$ 的最小值.

$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-1$

18.(2) $2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\pi]$.

$\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in[0,1]\Rightarrow f(x)\in[-1,0]$.

$f(x)-1\in[-2,-1]$ 时，$[f(x)]^2-(2+m)f(x)+2+m\le0$ 恒成立

$m\le\frac{1}{f(x)-1}+f(x)-1$

令 $t=f(x)-1$ $(t\in[-2,-1])$

$h(t)=\frac{1}{t}+t$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增.

$\therefore h(t)_{min}=h(-2)=-\frac{5}{2}\Rightarrow m\le-\frac{5}{2}$.

$\therefore m$ 范围为 $(-\infty,-\frac{5}{2}]$

10. 设 z_1，z_2 为复数，则下列结论中正确的是

A. $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}|$

B. $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

C. 若 $\frac{1}{z_1}$ 为虚数，则 z_1 也为虚数

D. 若 $|z_1 + i| = 1$，则 $|z_1|$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

分别设复数

A. 设 $z_1 = a+bi$　$z_2 = c+di$　$\overline{z_2} = c-di$.

$z_1 z_2 = ac-bd+(ad+bc)i$

$z_1\overline{z_2} = ac+bd+(bc-ad)i$

$|z_1 z_2| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$

$|z_1\overline{z_2}| = \sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2} = \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$

$\therefore |z_1 z_2| = |z_1\overline{z_2}|$

平方比较大小

B. $|z_1-z_2| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

$|z_1|+|z_2| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$

柯西不等式

$[|z_1|+|z_2|]^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \geq (x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2$

$\geqslant 2\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+2abcd} = 2|ac+bd|$

$\geqslant (a^2+c^2+2ac)+(b^2+d^2+2bd) = (a+c)^2+(b+d)^2 = |z_1+z_2|^2$

$\therefore |z_1|+|z_2| \geqslant |z_1+z_2|$

D. $|z_1+i| = 1$

设 $z_1 = x+yi$

$x^2+(y+1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1-(y+1)^2$

$|z_1| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1-(y+1)^2+y^2} = \sqrt{-2y}$　$y \in [-1,0]$

$\therefore |z_1|_{max} = \sqrt{2}$

19. （17分）

已知 a,b,c 分别是$\triangle ABC$对边，且 $\dfrac{\cos A}{2\cos B}=\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$．点 P 为三角形内部一点，且满足 $\angle BPA=\angle APC=\angle CPB=120^{\circ}$．

（1）求角 B；

（2）若 $b^2-(a-c)^2=6$，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ 的值；

（3）若 $b=\sqrt{3}$，求 $|PA|-|PB|+|PC|$ 的最小值.

第8题　（单选题）你的得分0.0/满分5.0，班级正确率9.26%，年级正确率13.54%

【考查方向】利用向量的数量积求向量的夹角；向量在平面几何中的应用

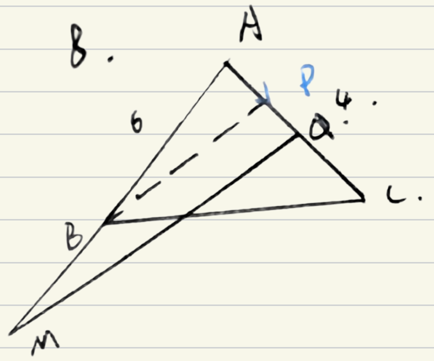
已知 O 为锐角 $\triangle ABC$ 的外心， $AB=6$， $AC=4$， 若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$， 且 $x+4y=2$，则 $\cos\angle BAC=(\quad)$

A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

【你的答案及订正】

B

8.



$\vec{AO} = x\vec{AB} + 4y\dfrac{\vec{AC}}{4}$

$= x\vec{AB} + 4y\vec{AP}$

连接 ~~AP~~ BP

∵ $x+4y=2$.

∴ O在MQ上.

由外心的性质知

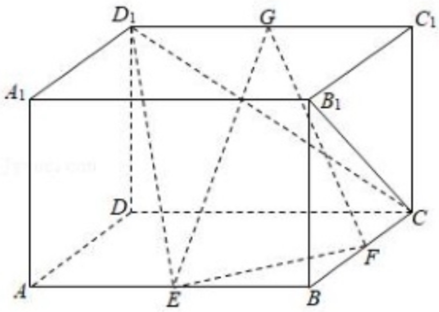
$MQ \perp AC$.

∴ $\cos\angle BAC = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

第11题 （多选题）你的得分4.0/满分6.0，班级正确率34.57%，年级正确率33.07%

【考查方向】线面平行的判定；线面平行的性质；线面垂直的判定；线面垂直的性质；棱柱的结构特征

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=DD_1=1$，$AB=\sqrt{3}$，E、F、G 分别是 AB、BC、C_1D_1 的中点，则下列说法正确的是（　）



A. $B_1C\perp D_1E$

B. $D_1C//$ 平面 GEF

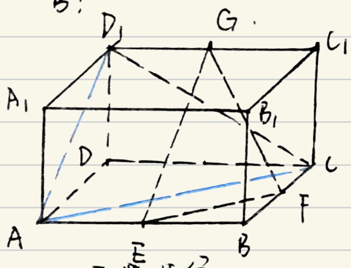
C. 若点 Q 在平面 $ABCD$ 内，且 $D_1Q\perp B_1C$，则线段 D_1Q 长度的最小值为 $\sqrt{2}$

D. 若点 P 在平面 $ABCD$ 内，且 $D_1P//$ 平面 GEF，则线段 D_1P 长度的最小值为 $\sqrt{2}$

【你的答案及订正】

AC

B:



面面平行.

连接 AD_1. AC.

$EF // AC$. $AD_1 // EG$.

$\Rightarrow$ 平面 GEF // 平面 D_1AC.

$\therefore D_1C //$ 平面 GEF.

第15题 你的得分5.0/满分13.0，班级正确率70.09%，年级正确率56.71%

【考查方向】向量的数量积的概念及其运算；利用向量的数量积求向量的模；向量的数量积与向量的垂直关系

已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2\sqrt{3}$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$.

(1) 求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $|2\vec{a}+\vec{b}|$ 的值；

(2) 若 $(\vec{a}-2\vec{b})\perp(\lambda\vec{a}+\vec{b})$，求 λ 的值.

15. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-12$.

$|2\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2} = 28 = 2\sqrt{7}$.

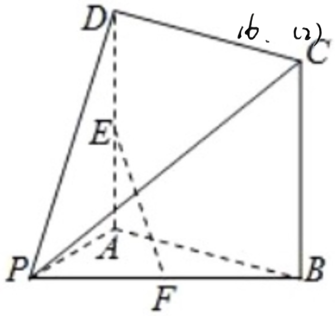
平方法

求模的方法.

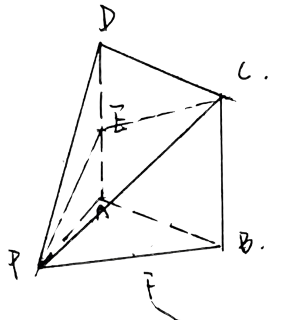
第16题 你的得分7.0/满分15.0，班级正确率52.96%，年级正确率40.89%

【考查方向】线面平行的判定；线面垂直的判定

在如图所示的几何体中， 四边形 $ABCD$ 是正方形， $PA\perp$ 平面 $ABCD$， E， F 分别是线段 AD， PB 的中点， $PA=AB=1$.



16. (2) 刘振之



(1) 求证： $EF//$ 平面 DCP;

(2) 求点 F 到平面 PDC 的距离.

法一：等体积法

法二：补形为正方体

（墙角模型）

法三：作垂线

$PA\perp$ 平面ABCD.

$CB\perp$ 平面 PAB

$PC=\sqrt{3}$.

$PD^2+DC^2=PC^2$

$\triangle PDC$ 为 Rt$\triangle$.

面积法： $V_{E-PDC}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}$.

$CD\perp$ 平面 PDA.

$V_{C-PDE}=\frac{1}{3}S_{PDE}\cdot CD=\frac{1}{12}$

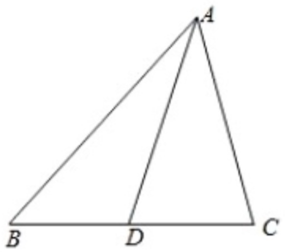
$V_{E-PDC}=V_{C-PDE}$.

$h=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

第17题 你的得分7.0/满分15.0，班级正确率23.33%，年级正确率16.20%

【考查方向】由一个三角函数值求其他三角函数值；两角和与差的正弦公式；三角形面积公式；余弦定理、正弦定理在平面几何中的应用

如图所示，已知 a， b， c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A， B， C 的对边，且 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$.



(1) 求 A;

(2) 若 AD 为 BC 边上的中线， $\cos B=\frac{1}{7}$， $AD=\frac{\sqrt{129}}{2}$， 求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. (2). $\cos B=\frac{1}{7}$

$\sin B=\sqrt{1-(\frac{1}{7})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{5}{14}\sqrt{3}$.

$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{7}{5}$.

设 $a=7x$. $c=5x$.

在 $\triangle ABD$ 中 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$

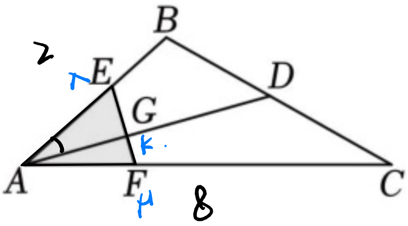
$\Rightarrow x=1$ $a=7$. $c=5$.

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=10\sqrt{3}$.

第19题 你的得分4.0/满分17.0，班级正确率10.68%，年级正确率6.53%

【考查方向】 向量的数量积的概念及其运算；平面向量基本定理的应用；利用余弦定理解三角形；利用正弦定理解三角形

如图，设$\triangle ABC$中角A、B、C所对的边分别为a，b，c，AD为BC边上的中线，$c=2$，$2a\sin C\cos B=a\sin A-b\sin B+\frac{1}{4}c\sin B$，$\cos\angle BAD=\frac{\sqrt{21}}{7}$.



(1) 求b边的长度； √ $b=8=4c$ $c=2$

(2) 求$\triangle ABC$的面积；

(3) 设点E，F分别为边AB，AC上的动点（含端点），线段EF交AD于G，且$\triangle AEF$的面积为$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{3}$，求$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}$的取值范围.

(2) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=2+8\cos\angle BAC$

$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC}$

$=\sqrt{17+8\cos\angle BAC}$

$\cos\angle BAD=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{\sqrt{21}}{7}$ 解得 $\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{11}{14}$ (舍)

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC=4\sqrt{3}$.

(3)

(3) 设$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AE}$，

$\overrightarrow{AC}=\mu\overrightarrow{AF}(\lambda,\mu,k\in[1+\infty))$，

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow 2k\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AE}$

$+\mu\overrightarrow{AF}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{\lambda}{2k}\overrightarrow{AE}+\frac{\mu}{2k}\overrightarrow{AF}$，

根据E、F、G三点共线，得$\lambda+\mu=2k$，

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{k}\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})$

$=\frac{1}{2k}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{2k}\cdot(\frac{1}{\mu}\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{\lambda}\cdot|\overrightarrow{AB}|^2$

$+(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda})|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\theta)(\cos\theta=\frac{1}{2},\theta$为$\angle BAC)$

$=\frac{1}{2k}\cdot(\frac{64}{\mu}-\frac{4}{\lambda}+\frac{8}{\mu}-\frac{8}{\lambda})=\frac{1}{\lambda+\mu}(\frac{72}{\mu}-\frac{12}{\lambda})$

$=\frac{12(6\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)\lambda\mu}$，

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AEF}}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\ \theta}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AF}|\sin\ \theta}=3$，$\therefore\lambda\mu=3$.

$\therefore\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=4\cdot\frac{6\lambda-\frac{3}{\lambda}}{\lambda+\frac{3}{\lambda}}=12\cdot\frac{2\lambda^2-1}{\lambda^2+3}$

$=12(2-\frac{7}{\lambda^2+3})$，

$\mu=\frac{3}{\lambda}\geqslant 1\Rightarrow\lambda\leqslant 3\Rightarrow\lambda\in[1,3]\Rightarrow\lambda^2+3\in[4,12]$

，

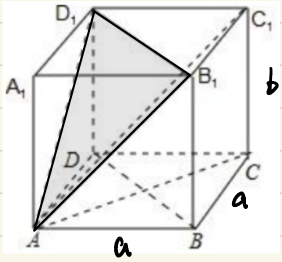
$\frac{7}{12}\leqslant\frac{7}{\lambda^2+3}\leqslant\frac{7}{4}$，$\therefore\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}\in[3,17]$.

R = 3

7. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形，其外接球的体积为 36π. 若 $AC_1 \perp BD$，则直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球被平面 AB_1D_1 截得的截面面积的最小值为（ A ）

A. 8π B. $\frac{243\pi}{10}$

C. $\frac{81\pi}{10}$ D. 6π



正四棱柱

证得底面为正方形

四边形ABCD为正方形

四棱柱边长和高不定，
通过半径找关系。

$AC_1 = 6$ 设 $AB = AD = a$，$CC_1 = b$.

$AC_1^2 = 2a^2 + b^2 = 36 \Rightarrow b^2 = 36 - 2a^2$.

在 $\triangle AB_1D_1$ 中，$AB_1 = AD_1 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(36-2a^2)} = \sqrt{36-a^2}$

$B_1D_1 = \sqrt{2}a$

余弦定理 → 求正弦
→ 截面圆半径

$$\cos\angle AD_1B_1 = \frac{AD_1^2 + B_1D_1^2 - AB_1^2}{2AD_1 \cdot B_1D_1} = \frac{a}{\sqrt{36-a^2} \times \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin\angle AD_1B_1 = \sqrt{1-\cos^2\angle AD_1B_1} = \sqrt{\frac{72-3a^2}{72-2a^2}}$$

基本不等式求最值.

$$2r = \frac{AB_1}{\sin\angle AD_1B_1} = \frac{\sqrt{2}(36-a^2)}{\sqrt{72-3a^2}} \Rightarrow r = \frac{36-a^2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24-a^2}}$$

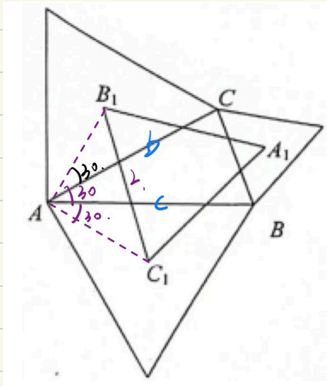
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{24-a^2} + \frac{12}{\sqrt{24-a^2}}\right) \geq 2\sqrt{2}$$

当且仅当 ——

$S = \pi \times (2\sqrt{2})^2 = 8\pi$.

18. （17 分）已知在任意一个三角形的三条边上分别向外做出三个等边三角形,则这三个等边三角形的中心也构成一个等边三角形;我们称由这三个等边三角形中心构成的三角形为其外拿破仑三角形.在锐角$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且$a=\sqrt{6}$,以$\triangle ABC$的边BC,CA,AB分别向外作的三个等边三角形的中心分别记为A_1,B_1,C_1,且$\triangle A_1B_1C_1$的面积为$\sqrt{3}$,记R为$\triangle ABC$的外接圆半径.

（1）若$R=\sqrt{6}$,求$\triangle ABC$的面积;



求面积
$S=\frac{1}{2}bc\sin A$
$\Downarrow$
求bc
(余弦定理).
$\Downarrow$
求b^2+c^2
(勾股定理).

解(1) $\frac{a}{\sin A}=2R=2\sqrt{6}$.

$\sin A=\frac{1}{2}$.

$A=30^\circ$. $\angle C_1AB=30^\circ$.

$\angle B_1AC_1=90^\circ$.

$B_1C_1=2$.

$AB_1=\frac{\sqrt{3}}{3}b$. $AC_1=\frac{\sqrt{3}}{3}c$.

$AB_1^2+AC_1^2=B_1C_1^2 \Rightarrow b^2+c^2=12$.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 30^\circ=6 \Rightarrow bc=2\sqrt{3}$. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）若$R\in[\sqrt{3},\sqrt{6}]$,求$\triangle ABC$面积的取值范围.

$\angle A$未知.

用$\angle A$表示bc.

(2) $B_1C_1^2=AB_1^2+AC_1^2-2AB_1\cdot AC_1\cos(A+60^\circ)$

$$\left.\begin{array}{l} b^2+c^2-2bc\cos(A+60^\circ)=12. \\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6. \end{array}\right\} 2bc\cos A-2bc\cos(A+60^\circ)=6.$$

$bc\left(\cos A-\cos(A+60^\circ)\right)=3$.

$bc=\frac{3}{\cos A-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A}=\frac{6}{\cos A+\sqrt{3}\sin A}$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{6\sin A}{\cos A+\sqrt{3}\sin A}=\frac{3}{\cot A+\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{6}}{\sin A}\in[2\sqrt{3},2\sqrt{6}]$.

$\sin A\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

$\therefore A\in[30^\circ,45^\circ]$.

$\cot A\in[1,\sqrt{3}]$.

$S_{\triangle ABC}\in[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}-3}{2}]$.

第10题 （多选题）你的得分4.0/满分6.0，班级正确率35.22%，年级正确率57.78%

【考查方向】由基本不等式求最值或取值范围；向量的数量积的概念及其运算；利用向量的数量积求向量的模；利用余弦定理解三角形；利用正弦定理解决范围与最值问题

$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，S 为 $\triangle ABC$ 的面积，且 $a=2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}S$，下列选项正确的是（ABD $bc=\frac{2}{3}\sqrt{3}\times\frac{1}{2}bc\sin A$.

A. $A=\frac{\pi}{3}$ $\tan A=\sqrt{3}$. $\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$.

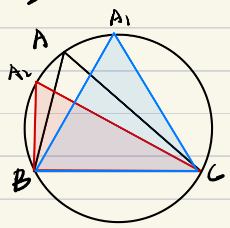
B. $\boxed{\text{若}\triangle ABC\text{有两解}}$，则 b 取值范围是 $(2\sqrt{3},4)$ √

C. 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 b 取值范围是 $[2,4]$

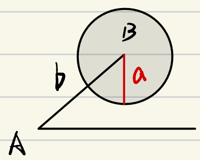
D. 若 D 为 BC 边上的中点，则 AD 的最大值为 3

B: 若 $\triangle ABC$ 有两解，则 $b\sin A<a<b$.

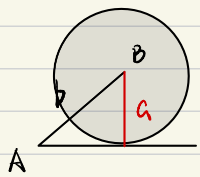
$\frac{\sqrt{3}}{2}b<2\sqrt{3}<b$. $\Rightarrow b\in(2\sqrt{3},4)$.



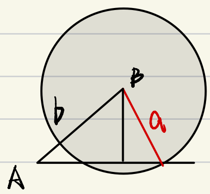
SSA三角形的解



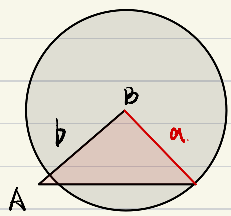
$a<b\sin A$ 时，无解.



$a=b\sin A$ 时，1个解.



$b\sin A<a<b$ 时，2个解.

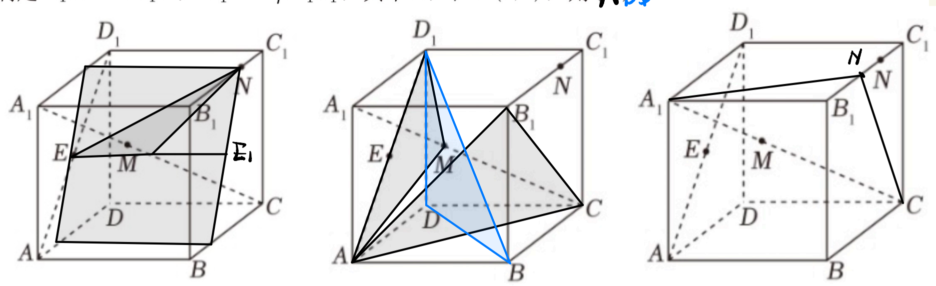


$a\geq b$ 时，1个解

第11题 （多选题）你的得分2.0/满分6.0，班级正确率28.30%，年级正确率37.80%

【考查方向】利用余弦定理解三角形；三角形面积公式；面面平行的判定；线面垂直的判定；面面垂直的判定

如图所示，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是线段 AD_1 的中点，点 M，N 满足 $\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，$\overrightarrow{B_1N}=\mu\overrightarrow{B_1C_1}$，其中 λ，$\mu\in(0,1)$，则（ABD



A. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{2}{3}$ 时，过 E，M，N 三点的平面截正方体得到的截面多边形的周长为 $\frac{12+4\sqrt{10}}{3}$ √

B. 存在 $\lambda\in(0,1)$，使得平面 $AD_1M\perp$ 平面 AB_1C

$B_1C\perp$ 平面 BDD_1
$BD_1\perp$ 平面 AB_1C $\Rightarrow D_1M\perp$ 平面 AB_1C. $\lambda=\frac{1}{2}$.

C. 存在 λ，$\mu\in(0,1)$，使得平面 $MEN//$ 平面 AB_1C

D. 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，点 A 到平面 A_1NC 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 建.

第18题　你的得分10.0/满分17.0，班级正确率34.30%，年级正确率42.06%

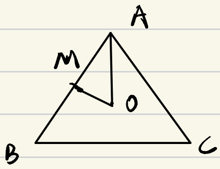
【考查方向】由基本不等式求最值或取值范围；向量的数量积的概念及其运算；向量在平面几何中的应用；利用余弦定理解三角形；利用正弦定理解三角形

从 ①$\sin^2 B-\sin^2 A+\sin^2 C-\sin B\sin C=0$， ②$b\sin A+\sqrt{3}a\cos B=\sqrt{3}c$， 这两个条件中任选一个， 补充在下面问题中， 并加以解答.

在$\triangle ABC$中，a，b，c分别是角A，B，C的对边，若__①__.　　$A=\frac{\pi}{3}$.

(3) 若O为$\triangle ABC$的外接圆圆心，且$\frac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}=2m\overrightarrow{AO}$，求实数$m$的值.

$$\frac{\cos B\,\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{\sin C}\overrightarrow{AC}}{\frac{\cos B}{\sin C}}$$



$OM\perp AB$.

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MO}$

$$\frac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}=2m(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MO})$$

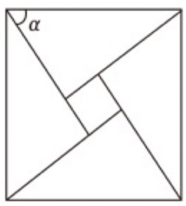
$$\frac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}^2+\frac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AB}^2$$

$$\frac{\cos B}{\sin C}\cdot\sin^2 C+\frac{\cos C}{\sin B}\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A=m\sin^2 C$$

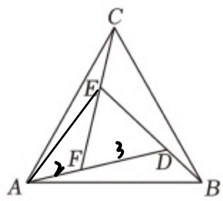
$$\Rightarrow m=\frac{\cos B+\cos A\cos C}{\sin C}=\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

第14题

赵爽是我国古代数学家，大约在公元222年，他为《周髀算经》一书作序时，介绍了“勾股圆方图”，亦称“赵爽弦图”（以弦为边长得到的正方形由4个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成，如图①），类比“赵爽弦图”，可构造如图②所示的图形，它是由3个全等的三角形与中间一个小等边三角形拼成的一个较大的等边三角形，其中$2\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{FA}$，则$\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}}$的值为__3:13__；设$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu=$__$\frac{35}{39}$__.



图①



图②

$S_{\Delta AFC}=\frac{2}{3}S_{\Delta DEF}\times\frac{5}{3}=\frac{10}{9}S_{\Delta DEF}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{10}{3}S_{\Delta DEF}+S_{\Delta DEF}$

$=\frac{13}{3}S_{\Delta DEF}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{EF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CF}=\frac{3}{5}(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC})$　　$\overrightarrow{FD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD})=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}(\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD}=\frac{25}{39}\overrightarrow{AB}+\frac{10}{39}\overrightarrow{AC}$